

Repetitorium: FGI-1 Automatentheorie Tag 1

Jan Henrik Röwekamp
(8roeweka)

06.07. & 07.07.2013

Organisation

- 2 Termine (Sa. und So., der 06.07. & 07.07.13)
- 14:15 – 17:00 Uhr in Raum F-132
- 30 Minuten Pause: etwa 15:45 – 16:15 Uhr
(richtet sich nach dem Stoff)
- Repetitorium wird aufgezeichnet (Lecture2go)
- Folien leider (noch) nirgendwo online

Zu mir

- Jan Henrik Röwekamp
- M.Sc. Informatik (10. Hochschul-Semester)
- Seit 2008 als Student an der Uni Hamburg
- Mail/Jabber: 8roeweka (@inf...)
- Diverse Semester als Gruppenleiter gearbeitet
(3x DM, 2x FGI-1, 1x FGI-2 & 1x AD)
- Autor der OLAT-Selbsttest-Fragen

Allgemein zum Ablauf

- Fragen zum aktuell vorgestellten Thema können jederzeit gestellt werden.
- Fragen zu nicht (in diesem Moment oder aber gar nicht) besprochenen Themen bitte am Sonntagabend
- Ich neige ein wenig zu zu schnell reden. Wenn es zu schnell wird, sagt bitte was. 😊

Geplanter Ablauf (Tag 1)

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Warum Automaten?
- Einführung Chomsky Hierarchie
- Reguläre Mengen
- DFA, NFA
- Potenzautomat
- ϵ -FA & ϵ -frei machen
- Kleene-Verfahren
- <Pause>
- Abschlusseigenschaften
- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- Kellerautomaten
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- Turing-Maschinen
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- <Pause>
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- Komplexitätsklassen
- NP-Vollständigkeit
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

Geplanter Ablauf (Tag 1)

- Organisation, Vorstellung, etc.
- **Warum Automaten?**
- Einführung Chomsky Hierarchie
- Reguläre Mengen
- DFA, NFA
- Potenzautomat
- ϵ -FA & ϵ -frei machen
- Kleene-Verfahren
- **<Pause>**
- Abschlusseigenschaften
- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)

Warum Automaten?

- Gegeben: Eine Obermenge, z.B. die Menge aller 0 und 1 Folgen (binäre Codierung)
- Gesucht: Teilmenge, die bestimmte Eigenschaften erfüllt, bzw. Identifikation der Elemente der Teilmenge in der Obermenge
- Je nach Teilmenge sehr leicht bis sehr schwer bis hin zu unmöglich
- Idee: Abstrakte Automaten mit unterschiedlicher Mächtigkeit

Geplanter Ablauf (Tag 1)

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Warum Automaten?
- **Einführung Chomsky Hierarchie**
- Reguläre Mengen
- DFA, NFA
- Potenzautomat
- ϵ -FA & ϵ -frei machen
- Kleene-Verfahren
- **<Pause>**
- Abschlusseigenschaften
- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)

Die Chomsky-Hierarchie

Überabzählbare Mengen

$\neq$

Abzählbare Mengen

$\supseteq$

Typ 0

Typ 0 -
Grammatik

DTM NTM

Aufzählbare Mengen

$\supseteq$

DTM NTM

Entscheidbare Mengen

$\supseteq$

Typ 1

Kontextsensitive
Grammatik

LBA

Kontextsensitive Mengen

– uvwxy-Theorem

$\supseteq$

PDA

Kontextfreie Mengen

Typ 2

Kontextfreie
Grammatik

DPDA

Deterministisch
Kontextfreie Mengen

– uvw-Theorem

$\supseteq$

Typ 3

Rechts- bzw.
linkslinare
Grammatik

DFA NFA ϵ -FA GFA

Reguläre Mengen

Potenzautomat

ϵ -frei machen

Kleene

trivial

Spezialfälle

Geplanter Ablauf (Tag 1)

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Warum Automaten?
- Einführung Chomsky Hierarchie
- **Reguläre Mengen**
- DFA, NFA
- Potenzautomat
- ϵ -FA & ϵ -frei machen
- Kleene-Verfahren
- **<Pause>**
- Abschlusseigenschaften
- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)

Reguläre Mengen

- Klasse an Mengen
- Lassen sich durch bestimmte Strukturen beschreiben (reguläre Ausdrücke)
- Praxisanwendung: Z.B. Parsing
- Typ 3 Mengen der Chomsky-Hierarchie

Reguläre Ausdrücke

- Beschreiben reguläre Mengen
- 2 Schreibweisen:
 - Reguläre Ausdruck – Schreibweise
 - (Mengen – Schreibweise)
- Bestehen aus den folgenden Komponenten:
 - Konkatenation: $(a \cdot b)$ beschreibt die Menge $\{ab\}$
 - Auswahl: $(a+b)$ beschreibt die Menge $\{a, b\}$
 - Sternbildung: a^* beschr. die Menge $\{\epsilon, a, aa, aaa, \dots\}$
 - Plusbildung: a^+ beschreibt die Menge $\{a, aa, aaa, \dots\}$

Geplanter Ablauf (Tag 1)

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Warum Automaten?
- Einführung Chomsky Hierarchie
- Reguläre Mengen
- **DFA, NFA**
- Potenzautomat
- ϵ -FA & ϵ -frei machen
- Kleene-Verfahren
- **<Pause>**
- Abschlusseigenschaften
- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)

Die Chomsky-Hierarchie

Überabzählbare Mengen

$\neq$

Abzählbare Mengen

$\supseteq$

Typ 0

Typ 0 -
Grammatik

DTM NTM

Aufzählbare Mengen

$\supseteq$

DTM NTM

Entscheidbare Mengen

$\supseteq$

Typ 1

Kontextsensitive
Grammatik

LBA

Kontextsensitive Mengen

– uvwxy-Theorem

$\supseteq$

PDA

Kontextfreie Mengen

Typ 2

Kontextfreie
Grammatik

DPDA

Deterministisch
Kontextfreie Mengen

– uvw-Theorem

$\supseteq$

Typ 3

Rechts- bzw.
linkslinere
Grammatik

Potenzautomat

DFA

NFA

ϵ -FA

GFA

ϵ -frei machen

Kleene

trivial

Reguläre Mengen

Spezialfälle

DFA/NFA: (Nicht-)deterministische endliche Automaten

- Formal Quintupel (5-Tupel): $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0/S_0, F)$
- Q ist eine endliche Menge an Zuständen.
- Σ ein endliches Eingabealphabet
- F ist eine Endzustandsmenge, es gilt $F \subseteq Q$.
- q_0 ist ein Startzustand (DFA) bzw. S_0 eine Startzustandsmenge (NFA).
- δ ist eine Überföhrungsfunktion:
 - DFA: $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$
 - NFA: $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

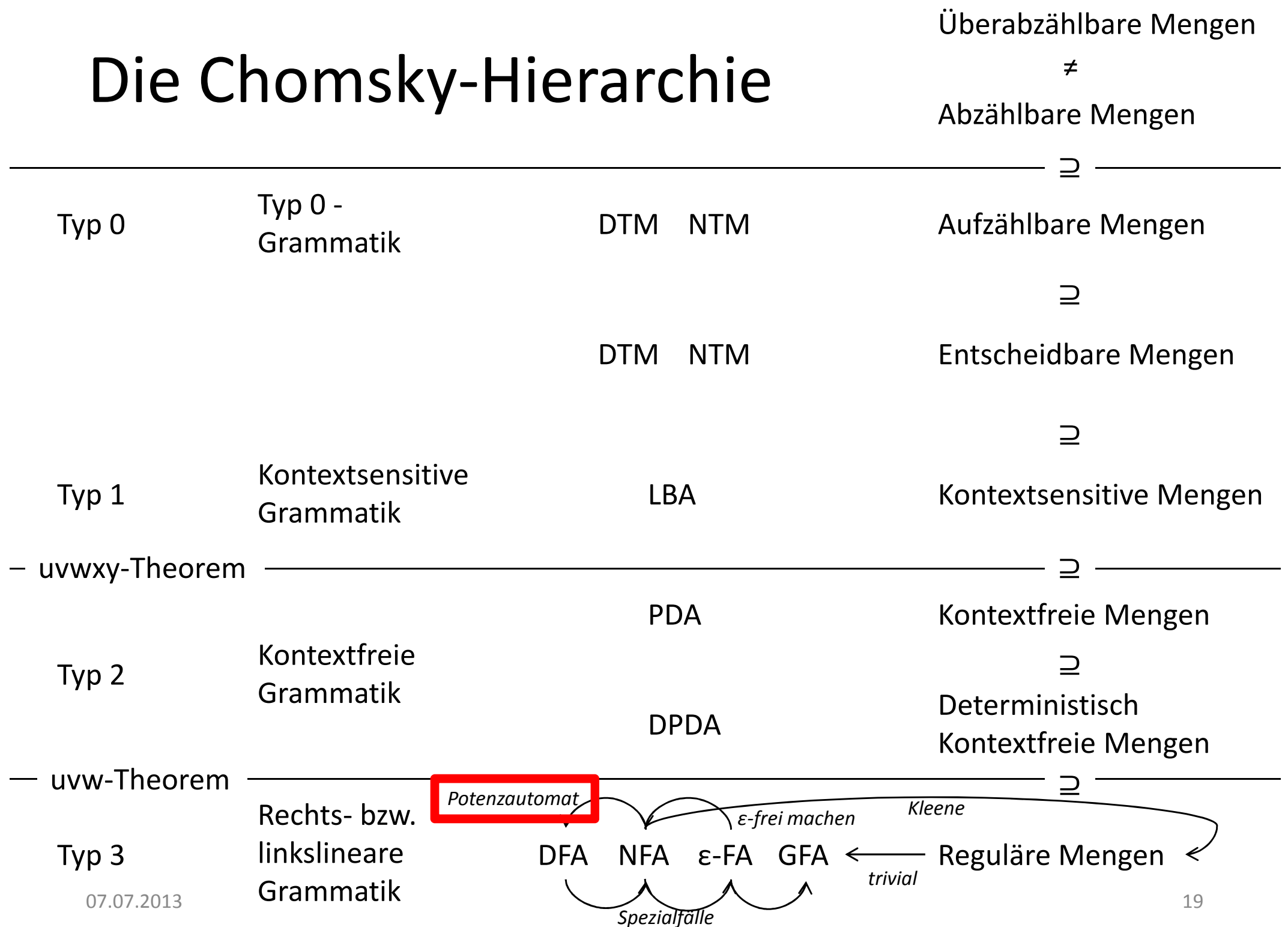
Akzeptierte Sprache von NFAs/DFAs

- <Tafel>
- izDFAs und vDFAs

Geplanter Ablauf (Tag 1)

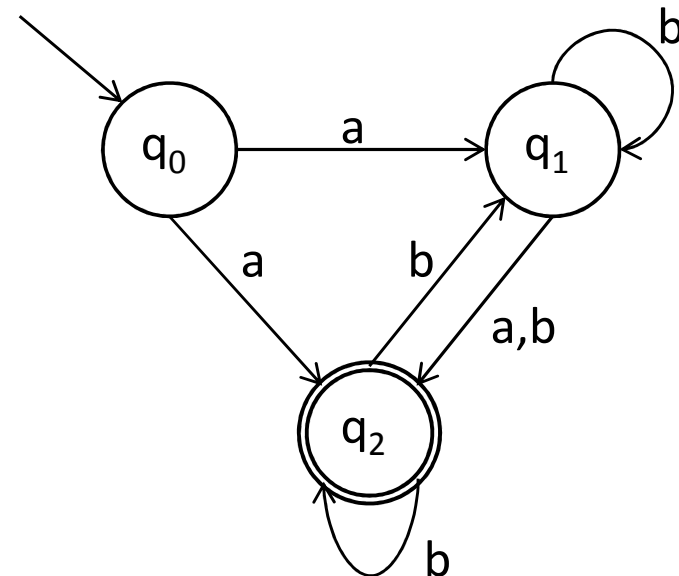
- Organisation, Vorstellung, etc.
- Warum Automaten?
- Einführung Chomsky Hierarchie
- Reguläre Mengen
- DFA, NFA
- **Potenzautomat**
- ϵ -FA & ϵ -frei machen
- Kleene-Verfahren
- **<Pause>**
- Abschlusseigenschaften
- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)

Die Chomsky-Hierarchie



Potenzautomat

- NFA's lassen sich in (exponentiell größere) DFA's überführen, ohne dabei die akzeptierte Sprache zu ändern.
- Aufgabe: Wandeln Sie den folgenden NFA in einen DFA um:
- Welche Sprache akzeptiert der NFA?



Geplanter Ablauf (Tag 1)

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Warum Automaten?
- Einführung Chomsky Hierarchie
- Reguläre Mengen
- DFA, NFA
- Potenzautomat
- ϵ -FA & ϵ -frei machen
- Kleene-Verfahren
- <Pause>
- Abschlusseigenschaften
- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)

Die Chomsky-Hierarchie

Überabzählbare Mengen

$\neq$

Abzählbare Mengen

$\supseteq$

Typ 0

Typ 0 -
Grammatik

DTM NTM

Aufzählbare Mengen

$\supseteq$

DTM NTM

Entscheidbare Mengen

$\supseteq$

Typ 1

Kontextsensitive
Grammatik

LBA

Kontextsensitive Mengen

– uvwxy-Theorem

$\supseteq$

PDA

Kontextfreie Mengen

Typ 2

Kontextfreie
Grammatik

DPDA

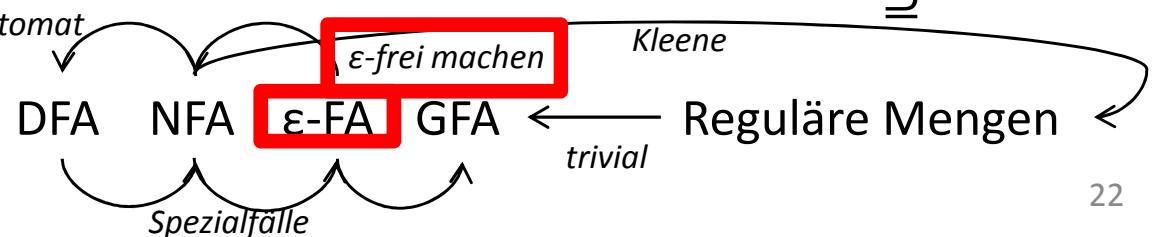
Deterministisch
Kontextfreie Mengen

– uvw-Theorem

$\supseteq$

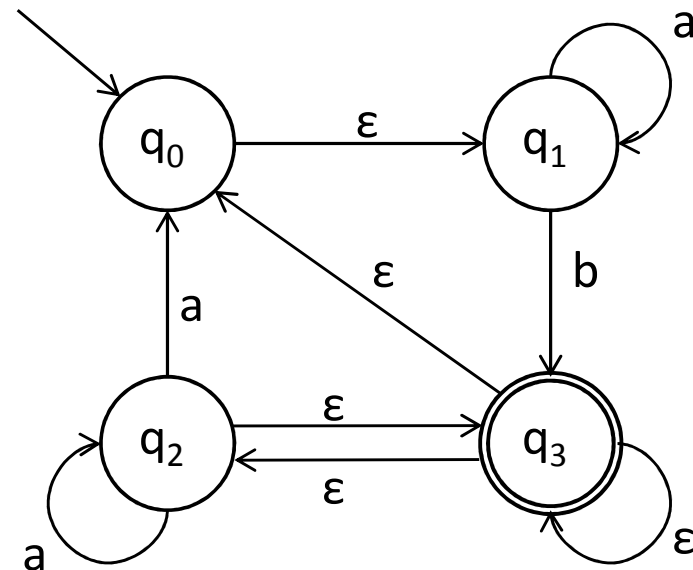
Typ 3

Rechts- bzw.
linkslinere
Grammatik



ϵ -FA & ϵ -frei machen

- ϵ -FA: Endlicher Automat, der das leere Wort an Kanten erlaubt.
- Kann zu gleich großem NFA umgebaut werden.
- Aufgabe: Wandeln Sie den folgenden ϵ -FA in einen NFA um:



Geplanter Ablauf (Tag 1)

- Organisation, Vorstellung, etc. (fertig)
- Warum Automaten?
- Einführung Chomsky Hierarchie
- Reguläre Mengen
- DFA, NFA
- Potenzautomat
- ϵ -FA & ϵ -frei machen
- Kleene-Verfahren
- <Pause>
- Abschlusseigenschaften
- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)

Die Chomsky-Hierarchie

Überabzählbare Mengen

$\neq$

Abzählbare Mengen

$\supseteq$

Typ 0

Typ 0 -
Grammatik

DTM NTM

Aufzählbare Mengen

$\supseteq$

DTM NTM

Entscheidbare Mengen

$\supseteq$

Typ 1

Kontextsensitive
Grammatik

LBA

Kontextsensitive Mengen

– uvwxy-Theorem

$\supseteq$

PDA

Kontextfreie Mengen

Typ 2

Kontextfreie
Grammatik

DPDA

Deterministisch
Kontextfreie Mengen

– uvw-Theorem

$\supseteq$

Typ 3

Rechts- bzw.
linkslinere
Grammatik

Potenzautomat

DFA

NFA

ϵ -FA

GFA

trivial

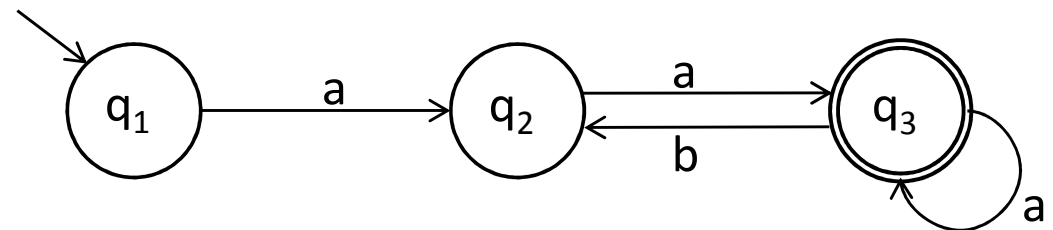
Kleene

Reguläre Mengen

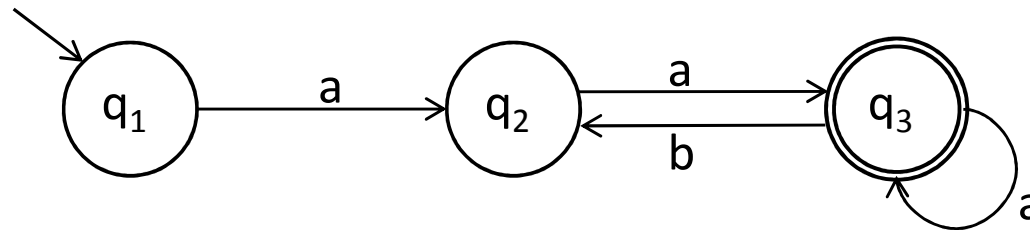
Spezialfälle

Kleene-Verfahren

- Rekursives Verfahren zum Ableiten des regulären Ausdrucks aus einem Automaten
- Exponentiell aufwändig!
- Aufgabe: Leiten Sie den zugehörigen regulären Ausdruck aus diesem Automaten ab:



Kleene-Verfahren: Anwendung



- Wir leiten aus den Übergängen ab:

$$R^0_{1,1} = \{\varepsilon\}$$

$$R^0_{2,1} = \emptyset$$

$$R^0_{3,1} = \emptyset$$

$$R^0_{1,2} = \{a\}$$

$$R^0_{2,2} = \{\varepsilon\}$$

$$R^0_{3,2} = \{b\}$$

$$R^0_{1,3} = \emptyset$$

$$R^0_{2,3} = \{a\}$$

$$R^0_{3,3} = \{a, \varepsilon\}$$

Keine Lust mehr?

Gehirn matsch?

30 Minuten PAUSE!

Geplanter Ablauf (Tag 1)

- Organisation, Vorstellung, etc. (fertig)
- Warum Automaten?
- Einführung Chomsky Hierarchie
- Reguläre Mengen
- DFA, NFA
- Potenzautomat
- ϵ -FA & ϵ -frei machen
- Kleene-Verfahren
- **<Pause>**
- **Abschlusseigenschaften**
- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)

Abschlusseigenschaften

- Reguläre Mengen sind abgeschlossen gegenüber:
 - Vereinigung
 - Komplement
 - Produkt
 - Schnittbildung
 - Sternbildung
 - (Homomorphismen)

Geplanter Ablauf (Tag 1)

- Organisation, Vorstellung, etc. (fertig)
- Warum Automaten?
- Einführung Chomsky Hierarchie
- Reguläre Mengen
- DFA, NFA
- Potenzautomat
- ϵ -FA & ϵ -frei machen
- Kleene-Verfahren
- <Pause>
- Abschlusseigenschaften
- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)

Die Chomsky-Hierarchie

Überabzählbare Mengen

$\neq$

Abzählbare Mengen

$\supseteq$

Typ 0

Typ 0 -
Grammatik

DTM NTM

Aufzählbare Mengen

$\supseteq$

DTM NTM

Entscheidbare Mengen

$\supseteq$

Typ 1

Kontextsensitive
Grammatik

LBA

Kontextsensitive Mengen

uvwxy-Theorem

$\supseteq$

PDA

Kontextfreie Mengen

Typ 2

Kontextfreie
Grammatik

DPDA

Deterministisch
Kontextfreie Mengen

uvw-Theorem

$\supseteq$

Typ 3

Rechts- bzw.
linkslinere
Grammatik

Potenzautomat

DFA

NFA

ϵ -FA

GFA

Kleene

Reguläre Mengen

trivial

Spezialfälle

ϵ -frei machen

Pumping Lemma

- Motivation: <Tafel>
- 2 Pumping Lemmas: uvw- und uvwxy-Theorem
- Beide sind sehr ähnlich.
- **Achtung: Obwohl das uvw-Theorem etwas über reguläre Mengen aussagt, kann damit nicht nachgewiesen werden, dass eine Menge regulär ist !!! Sondern nur, dass sie es nicht ist.**
- **Das Analoge gilt für das uvwxy-Theorem und kontextfreie Mengen!**

Pumping Lemma: uvw

- uvw-Theorem formal (Sei $L \subseteq \Sigma^*$) :
 $\forall L \in \text{Reg} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in L: \quad |z| \geq n \quad \Rightarrow$
 $\exists u, v, w \in \Sigma^*, z = uvw:$
 $|uv| \leq n$
 $|v| \geq 1$
 $\{u\}\{v\}^*\{w\} \subseteq L$
- Aufgabe: Verwenden Sie das uvw-Theorem um nachzuweisen, dass $a^n b^n$ nicht regulär ist.

Pumping Lemma: $uvwxy$

- $uvwxy$ -Theorem formal (Sei $L \subseteq \Sigma^*$) :
 $\forall L \in Cf \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in L: |z| \geq n \Rightarrow$
 $\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*, z = uvwxy:$
 $|vwx| \leq n$
 $|vx| \geq 1$
 $\{u\}\{v\}^*\{w\}\{x\}^*\{y\} \subseteq L$

Das wars für heute!

Vielen Dank für eure
Aufmerksamkeit! 😊

Repetitorium: FGI-1 Automatentheorie Tag 2

Jan Henrik Röwekamp
(8roeweka)

06.07. & 07.07.2013

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- Kellerautomaten
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- Turing-Maschinen
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- <Pause>
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- Komplexitätsklassen
- NP-Vollständigkeit
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- Kellerautomaten
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- Turing-Maschinen
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- <Pause>
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- Komplexitätsklassen
- NP-Vollständigkeit
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

Die Chomsky-Hierarchie

Überabzählbare Mengen

$\neq$

Abzählbare Mengen

$\supseteq$

Typ 0

Typ 0 -
Grammatik

DTM NTM

Aufzählbare Mengen

$\supseteq$

DTM NTM

Entscheidbare Mengen

$\supseteq$

Typ 1

Kontextsensitive
Grammatik

LBA

Kontextsensitive Mengen

– uvwxy-Theorem

$\supseteq$

PDA

Kontextfreie Mengen

Typ 2

Kontextfreie
Grammatik

$\supseteq$

DPDA

Deterministisch
Kontextfreie Mengen

– uvw-Theorem

$\supseteq$

Typ 3

Rechts- bzw.
linkslinare
Grammatik

Potenzautomat

DFA

NFA

ϵ -FA

GFA

Kleene

trivial

Reguläre Mengen

Spezialfälle

Kontextfreie Grammatiken

- Formal Quadrupel (4-Tupel): $G = (\Sigma, N, P, S)$
- Umgekehrter Ansatz zu Automaten:
Wort wird generiert, statt eingelesen.
- Ableitungen und Ableitungsbäume
- Praxisanwendung: Bspw. Compilerbau
- Typ 2 und Typ 3 Grammatiken
 - Rechts- und linkslineare Grammatik

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- **Grammatik-Normalformen**
- Kellerautomaten
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- Turing-Maschinen
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- **<Pause>**
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- Komplexitätsklassen
- NP-Vollständigkeit
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

Normalformen

- 2 Normalformen betrachtet:
Chomsky und (Greibach)
- Jede Grammatik kann in beide Normalformen überführt werden.
- Chomsky-Normalform (CNF) wird in 6 Schritten erzeugt.

Chomsky-Normalform erzeugen

- 1. ε -frei machen
 - 2. Reduzieren
 - 3. Kettenregeln entfernen
 - 4. Lange
Terminalregeln ersetzen
 - 5. Verkürzen
zu langer Regeln
 - 6. Wiederherstellen
der Sprache (ε)
- Bringen Sie die folgende Grammatik in CNF:
 $\Sigma = \{a, b, d\}$
 $S \rightarrow AB \mid aA$
 $A \rightarrow B \mid A \mid bb$
 $B \rightarrow DC \mid d \mid AB \mid \varepsilon$
 $C \rightarrow AC \mid CB \mid C$
 $D \rightarrow d \mid \varepsilon \mid S$

ε -frei machen

- $M_0 := \{A' \in N \mid A' \rightarrow \varepsilon \in P\}$
 $M_{i+1} := M_i \cup \{A' \in N \mid \exists w \in M_i^* : A' \rightarrow w \in P\}$

Produktive Nonterminale

- $M_0 := \Sigma$
 $M_{i+1} := M_i \cup \{A' \in N \mid \exists w \in M_i^* : A' \rightarrow w \in P\}$

Erreichbare Nonterminale

- $M_0 := \{S\}$
 $M_{i+1} := M_i \cup$
 $\{B' \in N \mid \exists a \in M_i \ \exists u, v \in (N \cup \Sigma)^* :$
 $A' \rightarrow uBv \in P\}$

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- **Kellerautomaten**
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- Turing-Maschinen
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- **<Pause>**
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- Komplexitätsklassen
- NP-Vollständigkeit
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

Die Chomsky-Hierarchie

Überabzählbare Mengen

$\neq$

Abzählbare Mengen

$\supseteq$

Typ 0

Typ 0 -
Grammatik

DTM NTM

Aufzählbare Mengen

$\supseteq$

DTM NTM

Entscheidbare Mengen

$\supseteq$

Typ 1

Kontextsensitive
Grammatik

LBA

Kontextsensitive Mengen

– uvwxy-Theorem

$\supseteq$

Typ 2

Kontextfreie
Grammatik

PDA

Kontextfreie Mengen

$\supseteq$

DPDA

Deterministisch
Kontextfreie Mengen

– uvw-Theorem

$\supseteq$

Typ 3

Rechts- bzw.
linkslinere
Grammatik

DFA NFA ϵ -FA GFA

Reguläre Mengen

Potenzautomat

ϵ -frei machen

Kleene

trivial

Spezialfälle

Kellerautomaten (PDAs)

- Formalismus analog zu endlichen Automaten.
- Aber:
 - Zusätzlicher Stack-Speicher
 - Nichtdeterminismus nicht mehr so offensichtlich
 - DPDAs und NPDAs akzeptieren **nicht** die gleiche Sprachfamilie!
 - 2 Möglichkeiten der Akzeptanz:
Leerer Keller und Endzustand

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- Kellerautomaten
- **Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)**
- Turing-Maschinen
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- **<Pause>**
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- Komplexitätsklassen
- NP-Vollständigkeit
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

Die Chomsky-Hierarchie

Überabzählbare Mengen

$\neq$

Abzählbare Mengen

$\supseteq$

Typ 0

Typ 0 -
Grammatik

DTM NTM

Aufzählbare Mengen

$\supseteq$

DTM NTM

Entscheidbare Mengen

$\supseteq$

Typ 1

Kontextsensitive
Grammatik

LBA

Kontextsensitive Mengen

– uvwxy-Theorem

$\supseteq$

PDA

Kontextfreie Mengen

Typ 2

Kontextfreie
Grammatik

DPDA

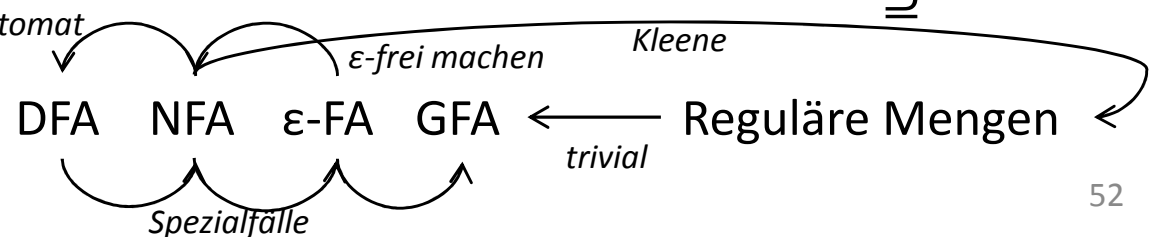
Deterministisch
Kontextfreie Mengen

– uvw-Theorem

$\supseteq$

Typ 3

Rechts- bzw.
linkslinere
Grammatik



Reguläre Mengen

Typ 0 und Typ 1 Grammatiken

- Typ 1 Grammatiken werden auch „kontextsensitive Grammatiken“ oder „monotone Grammatiken“ genannt.
- Existenz von Grammatiken, die Typ 2 (CFG), aber nicht Typ 1 sind.
- Typ 0 Grammatiken unterliegen nicht mehr der Monotonie-Einschränkung.
- Typ 0 Grammatiken sind sehr mächtig.

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- Kellerautomaten
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- **Turing-Maschinen**
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- **<Pause>**
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- Komplexitätsklassen
- NP-Vollständigkeit
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

Die Chomsky-Hierarchie

Überabzählbare Mengen

$\neq$

Abzählbare Mengen

$\supseteq$

Typ 0

Typ 0 -
Grammatik

DTM NTM

Aufzählbare Mengen

$\supseteq$

DTM NTM

Entscheidbare Mengen

$\supseteq$

Typ 1

Kontextsensitive
Grammatik

LBA

Kontextsensitive Mengen

– uvwxy-Theorem

$\supseteq$

PDA

Kontextfreie Mengen

Typ 2

Kontextfreie
Grammatik

DPDA

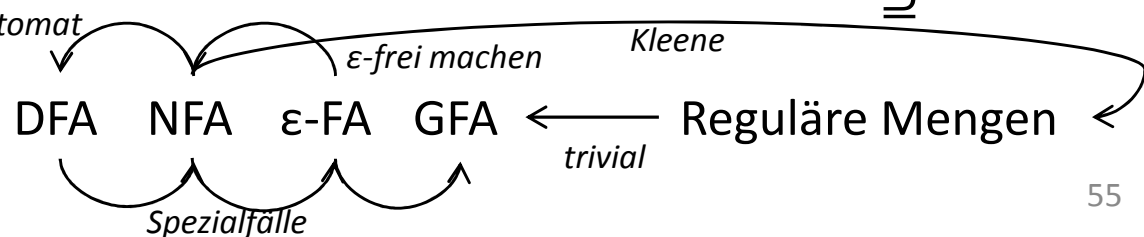
Deterministisch
Kontextfreie Mengen

– uvw-Theorem

$\supseteq$

Typ 3

Rechts- bzw.
linkslinere
Grammatik



Reguläre Mengen

Turing-Maschinen

- DTM formal 7-Tupel: $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$
 - Q ist eine Menge an Zuständen
 - Σ ist eine Eingabealphabet
 - Γ ein Bandalphabet
 - $\delta : (Q \times \Gamma) \rightarrow (Q \times \Gamma \times \{l, r, -\})$ eine Überföhrungsfkt.
 - $q_0 \in Q$ ist ein Startzustand
 - $\# \in \Gamma$ ist das Bandendsymbol
 - $F \subseteq Q$ ist eine Menge an Endzuständen

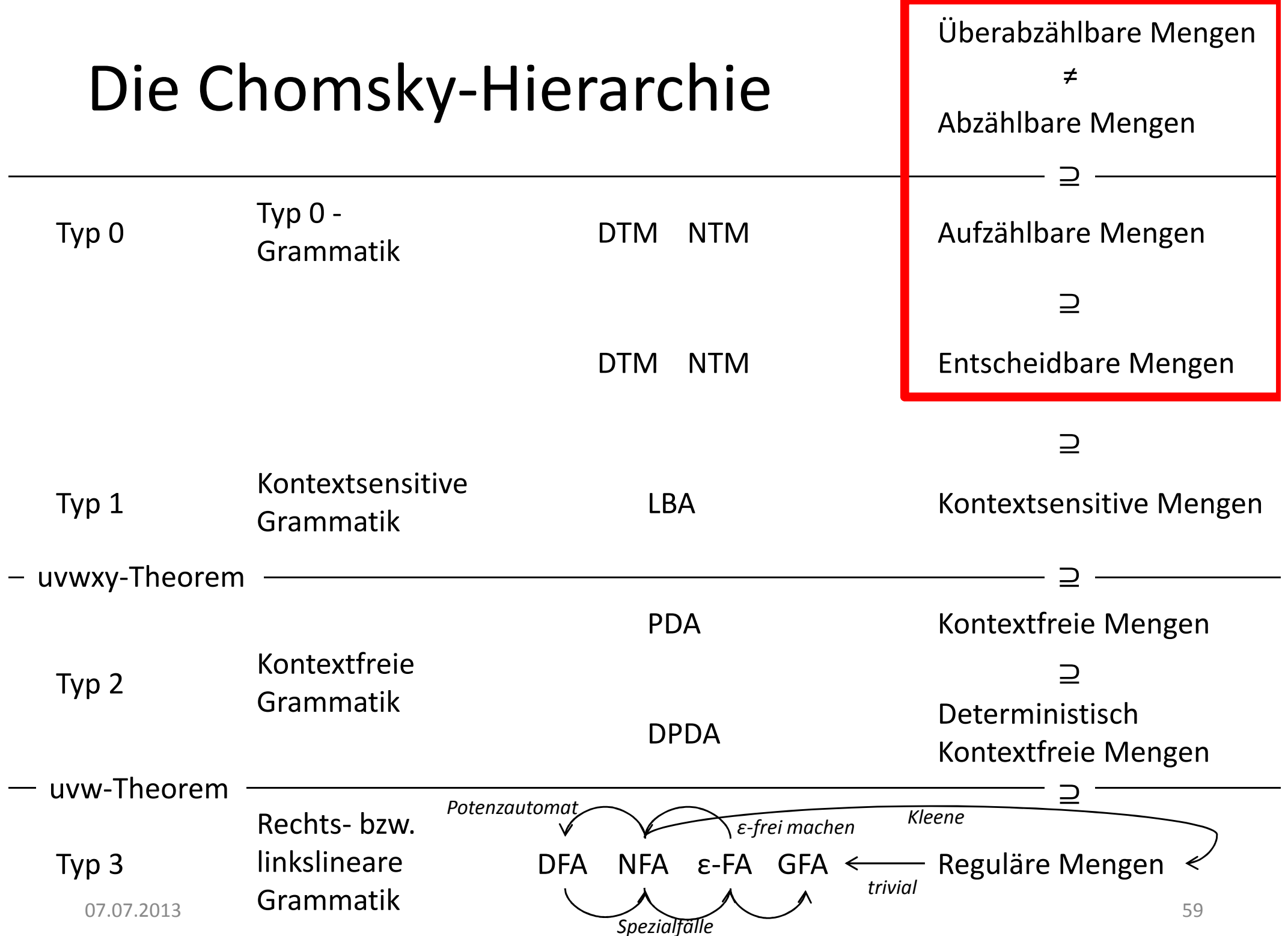
Turing-Maschinen

- Variabel beweglicher Lese-Schreibkopf
- NTM und DTM akzeptieren gleiche Sprachfamilie (Typ 0)
- Turing-Mächtigkeit & Satz von Turing
- Rechnungen und Erfolgsrechnungen
- Abbruch beim Erreichen des ersten Endzustands
- Nicht alles muss gelesen werden!
- Mehrere Bänder möglich (k-Band-TM)

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- Kellerautomaten
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- Turing-Maschinen
- **Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie**
- **<Pause>**
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- Komplexitätsklassen
- NP-Vollständigkeit
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

Die Chomsky-Hierarchie



Berechenbarkeitstheorie: Begriffe

- **Abzählbare Menge:**
Es existiert eine Bijektion aus den natürlichen Zahlen auf die Menge.
- **Aufzählbare Menge:**
Die Menge ist abzählbar und Elemente der Menge sind in endlicher Zeit durch eine TM als solche identifizierbar.
- **Entscheidbare Menge:**
Die Menge und ihr Komplement sind aufzählbar

Berechenbarkeitstheorie: Begriffe

- **Überabzählbare Menge:**
 - Es existiert keine Bijektion aus den natürlichen Zahlen auf die Menge BZW.
 - Jede Liste bzw. Struktur einer Liste von Elementen der Menge ist unvollständig BZW.
 - Die Menge kann nicht geordnet werden
- Überabzählbare Mengen existieren: z.B. $\mathbb{R}$
- Beweis: Diagonalisierung

Das Halteproblem H

- Bezeichnet das Problem, ob ein Programm bei gegebener Eingabe nach endlich vielen Schritten hält, oder nicht.
- Das Halteproblem ist aufzählbar (Das gegebene Programm kann, wenn es hält, einfach ausgeführt werden bis es hält.
→ „Ja“-Instanzen können erkannt werden.)
- Das Halteproblem ist jedoch nicht entscheidbar!
- Sehr wichtig in der Informatik

Charakteristische Funktion

- Die charakteristische Funktion
 $\chi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$
der Menge L gibt an, ob ein Element in der Menge liegt (1), oder aber nicht (0).
- Ist die charakteristische Funktion berechnbar, so ist die Menge entscheidbar. (und umgekehrt!)
- Bindeglied zwischen Berechenbarkeit (von Fkt.) und Entscheidbarkeit (von Mengen)

Beispiele zu den Mengen

- Überabzählbar: $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$
- Abzählbar, aber nicht aufzählbar: L_d
- Aufzählbar, aber nicht entscheidbar: H
- Entscheidbar: $\{a\}^*$, $\{a^n b^n\}$, ...

Fast geschafft, auf zum Endspurt!

Aber erstmal 30 Minuten PAUSE!

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- Kellerautomaten
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- Turing-Maschinen
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- **<Pause>**
- **Komplexitätstheorie & O-Notation**
- Komplexitätsklassen
- NP-Vollständigkeit
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

Komplexitätstheorie:

Jenseits der Chomsky-Hierarchie

- Chomsky-Hierarchie legt keinen Wert auf die **Geschwindigkeit** der Berechnung.
- In der Praxis: Geschwindigkeit hochgradig relevant
- → (strukturelle) Komplexitätstheorie
- Wichtiges Hilfsmittel der Komplexitätstheorie: O-Notation

O-Notation

- Etwaige asymptotische Abschätzung der Laufzeit in Abhängigkeit von der Eingabelänge
- Konstante Faktoren werden ignoriert
- Relevant ist nur der „schwerwiegendste“ Anteil der Laufzeitfunktion
- $O(f(n))$ bedeutet frei: Maximal so schlimm, wie $f(n)$ (ohne konstanten Faktor)
- Z.B.: $3n^3 + 5n^2 + 3n + 7$ liegt in $O(n^3)$. Aber auch in $O(n^5)$ und $O(2^n)$. Aber nicht in $O(n^2)$.

O-Notation

- Zusätzliche Mengen:

- $o(f(n))$ „<“

- $\Omega(f(n))$ „≥“

- $\omega(f(n))$ „>“

- $\Theta(f(n))$ „=“

- Mathematischer Nachweis:

$g(n) \in O(f(n))$ gdw. $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)/f(n) < \infty$

$g(n) \in o(f(n))$ gdw. $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)/f(n) = 0$

$g(n) \in \Omega(f(n))$ gdw. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) < \infty$

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- Kellerautomaten
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- Turing-Maschinen
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- **<Pause>**
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- **Komplexitätsklassen**
- NP-Vollständigkeit
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

Zeit- und Platzmaße

- Zeitmessung in Anzahl der Zustandsübergänge in Abhängigkeit von der Eingabelänge n :
 - Obergrenze $t(n)$
- Platzmesung in Anzahl der verwendeten Bandzellen in Abhängigkeit von der Eingabelänge n :
 - Obergrenze $s(n)$

Einschub: LBA

- LBA = „Linear beschränkter Automat“
- TM mit der Einschränkung:
 - $s(n) \in O(n)$
- Äquivalent zu Typ 1 Sprachen, bzw. kontextsensitiven Mengen C_s .

Komplexitätsklassen

- **P:** Menge aller Sprachen, die von einer deterministischen TM mit polynomiellem Zeitbedarf akzeptiert werden.
- **NP:** Menge aller Sprachen, die von einer nichtdeterministischen TM mit polynomiellem Zeitbedarf akzeptiert werden.
- **PSpace:** Menge aller Sprachen, die von einer deterministischen TM mit polynomiellem Platzbedarf akzeptiert werden.
- **NPSpace:** Menge aller Sprachen, die von einer nichtdeterministischen TM mit polynomiellem Platzbedarf akzeptiert werden.

Komplexitätsklassen

- $P \subseteq NP$ und $PSPACE \subseteq NPSPACE$:
 - Gilt, da jede DTM eine spezielle NTM ist.
- Satz von Savitch besagt: $NPSPACE \subseteq PSPACE$
 - Beweis zu umfangreich fürs Repetitorium.
- $NP \subseteq PSPACE$ gilt, da:
 - DTM's können NTM's simulieren $\rightarrow$ Wiederverwendung von Platz beim Durchprobieren der Möglichkeiten der NTM. Und: Um k Bandzellen zu verwenden, benötigt man mind. k Zeitschritte!
- Insgesamt: **$P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE$**

Geplanter Ablauf (Tag 2)

- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- Kellerautomaten
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- Turing-Maschinen
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- **<Pause>**
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- Komplexitätsklassen
- **NP-Vollständigkeit**
- Offene Fragerunde (ggf. jenseits von 17:00 Uhr)

NP-Vollständigkeit

- Schwerwiegendste Probleme in NP.
- Mindestens so schwer, wie alle anderen Probleme in NP.
- Alle anderen Probleme in NP lassen sich als Spezialfälle eines NP-vollständigen Problem modellieren.
- Existenz lange Zeit ungeklärt.
- Erstes NP-vollständige Problem entdeckt durch Cook und Levin

Reduktionen

- Überführung eines Problems in einen Spezialfall eines schwerwiegenderen (oder mindestens so schweren) Problems.
- Reduktion von A (kleineres Problem) nach B (schwereres Problem) notiert als: $A \leq B$
 - Achtung: $\leq$ trifft keine Aussage über eine Richtung, sondern über die Schwere der Probleme
- Ist die Reduktion deterministisch in Polynomialzeit möglich, schreibt man: $A \leq_{\text{POL}} B$

NP-Vollständigkeit

- Ein Problem L ist NP-vollständig gdw.:
 - L in NP liegt. UND
 - Alle anderen Probleme A aus NP in deterministischer Polynomialzeit auf L reduzierbar sind.
(L „NP-schwer“ ist)
- NP-Schwere ist transitiv:
 - NP-Schwere kann durch Reduktion eines NP-schweren Problem auf das neue Problem gezeigt werden

E N D E

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!
Wir sehen uns ggf. beim offiziellen
Repetitorium wieder.

Alles zu schnell? Alles zu unindividuell?
Wenn es mein Zeitplan zulässt,
gebe ich auch privat Nachhilfe! (25€ / 60 Min.).
Einfach an 8roeweka@inf... mailen. 😊

Offene Fragerunde