FGI-1 Repetitorium: Logik [Tag 1]

Jan Henrik Röwekamp
(8roeweka)

17.07., 18.07. & 19.07.2013

Organisation

- 3 Termine (Mi., Do. & Fr.,
  der 17.07., 18.07. & 19.07.13)
- 13:00 – 17:00 Uhr in Raum B-201
- 30 Minuten Pause in der Mitte
  (richtet sich nach dem Stoff)
- Repetitorium wird aufgezeichnet (Lecture2go)
- Folien online im Wiki unter:
  http://tinyurl.com/FGI1Rep

Zu mir

- Jan Henrik Röwekamp
- M.Sc. Informatik (10. Hochschul-Semester)
- Seit 2008 als Student an der Uni Hamburg
- Mail/Jabber: 8roeweka (@inf...)
- Diverse Semester als Gruppenleiter gearbeitet (3x DM, 2x FGI-1, 1x FGI-2 & 1x AD)
- Autor der OLAT-Selbsttest-Fragen

Allgemein zum Ablauf

- Fragen zum aktuell vorgestellten Thema können jederzeit gestellt werden.
- Fragen zu nicht (in diesem Moment oder aber gar nicht) besprochenen Themen bitte am Ende des jeweiligen Tages
- Ich neige ein wenig zum zu schnell reden. Wenn es zu schnell wird, sagt bitte was. ☺

Was bringt das hier?

- Die wichtigsten Inhalte der Vorlesung werden wiederholt.
- Das Repetitorium hat nicht den Anspruch den gesamten Inhalt des Moduls zu wiederholen!
- Insbesondere weiterführende Fragestellungen, Beweise und Exkurse werden weggelassen.
- Das Repetitorium deckt nicht alles ab, was in der Klausur gefragt werden könnte, jedoch einen guten Teil dessen.

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Ablauf – Tag 2

- Wdh.: Prädikatenlogik & Strukturen
- Prädikatenlogische Resolution
  - Formel schließen und bereinigte Pränexform (BPF)
  - Skolemisierung, Unifikation und Resolution
- Warum Automaten?
- Die Chomsky-Hierarchie
- Reguläre Mengen, DFA‘s und NFA‘s
- <Pause>
- Der Potenzautomat: Vom NFA zum DFA
- ε-FA & Überführung zum NFA (ε-frei machen)
- Kleene-Verfahren

Ablauf – Tag 3

- Pumping Lemma (uvw und uvwxy-Theorem)
- Grammatiken (CFG; Typ 2 und Typ 3)
- Grammatik-Normalformen
- Kellerautomaten
- Andere Grammatiken (Typ 0 und Typ 1)
- Turing-Maschinen
- <Pause>
- Entscheidbarkeit & Berechenbarkeitstheorie
- Komplexitätstheorie & O-Notation
- Komplexitätsklassen
- NP-Vollständigkeit

Logik: Allgemeine Motivation

- „Wenn 16 Nägel und 4 Bretter vorhanden sind, können wir einen Rahmen bauen. Wenn 4 Pfosten und ein Rahmen und Leim vorhanden sind, können wir ein Bettgestell bauen. Aus einem Bettgestell und 20 Leisten kann ein Bett gebaut werden.“
- Bekannt: Vorhandene Rohmaterialien.
- Frage: Können wir ein Bett bauen?
- Modellierung der Realwelt mit Logik.
- Logik ist allgegenwärtig.

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Atomare Aussagen

- Elementare, nicht trennbare, Einzelaussagen
- Entsprechen **einem nicht weiter zerlegbaren Satz**, der wahr oder falsch sein kann.
- Beispiele für atomare Aussagen:
  - „Das Auto ist rot."
  - „Es regnet."
  - „7 ist keine Zahl."
- Notiert mit einem Großbuchstaben: z.B.: A, B, C
- Die *Menge aller atomaren Aussagen* wird notiert als: AS_{AL}

Die aussagenlogische Sprache L_{AL}

- Atomare Formeln sind nicht sehr aussagekräftig.
- Kombination von Aussagen zu (komplexen) Formeln durch sog. Junktoren:
  - Zweistellig:
    - Konjunktion: $\wedge$ („und“)
    - Disjunktion: $\vee$ („oder“)
    - Implikation: $\Rightarrow$ („wenn“)
    - Biimplikation: $\Leftrightarrow$ („genau dann, wenn“)
  - Einstellig:
    - Negation: $\neg$ („nicht“)

Die aussagenlogische Sprache L_{AL}

- Formeln werden notiert mit Großbuchstaben ab F. Z.B.: F, G oder H
- Junktoren lassen sich erneut auf Formeln anwenden.
- Auf diese Weise lassen sich alle aussagen-logischen Formeln erzeugen.
- Die *Menge aller Formeln*, die so erzeugt werden können wird als L_{AL} bezeichnet.

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Strukturelle Induktion

- Gegeben: These zu <u>allen Formeln</u> aus L_{AL}.
- Gesucht: Beweis der Gültigkeit der These.
- Idee:
  - Formeln können nur mit atomaren Aussagen und Junktoren erzeugt werden.
  - These zeigen für atomare Formeln
  - These zeigen für Junktoranwendung, falls die These bereits je für die zusammengeführten Formeln galt.
- Analogie zur vollständigen Induktion, nur basierend auf der Struktur der Formeln.

→ Strukturelle Induktion

Strukturelle Induktion: Beispiel

- Weisen Sie mittels struktureller Induktion nach, dass in jeder Formel die Zahl der öffnenden Klammern gleich der Zahl der schließenden Klammern ist.
  Formal:
  $\forall F \in L_{AL}: |F|_{(} = |F|_{)}$

Strukturelle Induktion: Lösung

- $\forall F \in L_{AL}$: $|F|_(= |F|_)$
- Für $A \in AS_{AL}$ gilt offensichtlich:
  $|A|_(= 0 = |A|_)$ (*Ind.anfang*)
- Gelte für **zwei Formeln F und G** nun bereits:
  $|F|_(= |F|_)$ und $|G|_(= |G|_)$ (*Ind.annahme*)
- Sei $H = \neg F$. Es gilt: $|H|_(= |F|_(=_{IA} |F|_) = |H|_)$
- Sei $H = (F \wedge G)$ (*Ind.schritt*)
  – Es folgt: $|H|_(= |F|_(+ |G|_(+ 1$
  $=_{IA} |F|_) + |G|_) + 1 = |H|_)$
- Analog für $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$. $\square$

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Belegungen und Modelle

- Um eine Formel auszuwerten, müssen allen Aussagensymbolen Wahrheitswerte zugeordnet werden.
- Eine solche Zuordnung wird Belegung genannt und A geschrieben.
- Eine Belegung kann eine Formel F wahr machen: $A(\mathrm{F}) = 1$ oder aber falsch: $A(\mathrm{F}) = 0$
- Falls $A(\mathrm{F}) = 1$ gilt, wird A auch „Modell von F“ genannt.
- Wie berechnet sich $A(\mathrm{F})$?

Wahrheitsverläufe der Junktoren

A	B	$(A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$(A \Rightarrow B)$	$(A \Leftrightarrow B)$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Erfüllbarkeit und Bezeichnungen

- 5 Begriffe basierend auf Belegungen zu Formeln: Eine Formel kann sein:
  - **Unerfüllbar:** *Alle Belegungen sind keine Modelle*
  - **Falsifizierbar:** *Mind. eine Belegung ist kein Modell*
  - **Kontingent:** *Mind. je eine Belegung ist ein Modell und eine kein Modell. Die Formel ist also sowohl falsifizierbar als auch erfüllbar*
  - **Erfüllbar:** *Mind. Eine Belegung ist ein Modell*
  - **Tautologisch/(Allgemein)gültig:** *Alle Belegungen sind Modelle*

Beispiele: Erfüllbarkeit

- **Unerfüllbar:** $F = (\neg B \wedge B)$
  - Sowohl $A(B) = 0$, als auch $A(B) = 1$ führen zu $A(F) = 0$
- **Falsifizierbar:** $G = (B \Rightarrow C)$
  - $A(B) = 1$, $A(C) = 0$ führt zu $A(G) = 0$
- **Kontingent:** $H = (B \Rightarrow C)$
  - $A(B) = 1$, $A(C) = 0$ führt zu $A(H) = 0$
  - $A(B) = 0$, $A(C) = 0$ führt zu $A(H) = 1$
- **Erfüllbar:** $I = (B \Rightarrow C)$
  - $A(B) = 1$, $A(C) = 1$ führt zu $A(I) = 1$
- **Tautologisch/(Allgemein)gültig:** $K = (\neg B \vee B)$
  - Sowohl $A(B) = 0$, als auch $A(B) = 1$ führen zu $A(K) = 1$

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Äquivalenz von Formeln

- Betrachte die Formeln: $(A \Rightarrow B)$ und $(\neg A \vee B)$

A	B	$\neg A$	$(A \Rightarrow B)$	$(\neg A \vee B)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

- Offensichtlich haben die beiden Formeln den gleichen Wahrheitsverlauf: $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$
- Solche Gleichheiten gibt es viele (Vgl. Satz 4.7)

Normalformen: KNF und DNF

- Alle Formeln aus L_{AL} können in Normalformen überführt werden.
- Konjunktive Normalform (KNF):
  - $((\ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge (\ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge \ldots)$
- Disjunktive Normalform (DNF):
  - $((\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee (\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee \ldots)$
- Erzeugung in 3 Schritten:
  - Implikationen auflösen
  - Negationen nach Innen bringen
  - Distributivität anwenden bis KNF/DNF entsteht

KNF und DNF Beispiel

- Bringen Sie die folgende Formel sowohl in **KNF** als auch in **DNF**:

$$\neg(A \Rightarrow B) \lor C$$

KNF und DNF Beispiel: Lösung

- $\neg(A \Rightarrow B) \vee C$
- Implikationen auflösen:
  - $\neg(A \Rightarrow B) \vee C \equiv \neg(\neg A \vee B) \vee C$
- Negationen nach Innen bringen:
  - $\neg(\neg A \vee B) \vee C \equiv (\neg\neg A \wedge \neg B) \vee C \equiv (A \wedge \neg B) \vee C$
- Distributivität anwenden:
  - $(A \wedge \neg B) \vee C \equiv \underline{(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)}$ KNF
  - $\underline{(A \wedge \neg B) \vee C}$ DNF

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Folgerung

- Einführungsbeispiel:
- „Wenn 16 Nägel und 4 Bretter vorhanden sind, können wir einen Rahmen bauen. Wenn 4 Pfosten und ein Rahmen und Leim vorhanden sind, können wir ein Bettgestell bauen. Aus einem Bettgestell und 20 Leisten kann ein Bett gebaut werden.“
- „Es kann ein Bett gebaut werden.“
- Lässt sich diese Aussage aus dem gegebenen Material und den Regeln *folgern*?

Folgerung

- Eine Formel G folgt aus einer anderen Formel F, **wenn alle Belegungen, die F wahr machen, auch G wahr machen**.
- Notiert als: $F \vDash G$ („G folgt aus F“)
- Das Folgerungszeichen hat noch 4 weitere Bedeutungen (**M**: Formelmenge, *A*: Belegung):
  - $\mathbf{M} \vDash G$ („G folgt aus der Formelmenge M“)
  - $A \vDash G$ („Die Belegung *A* erfüllt G“)
  - $\vDash G$ („G ist eine Tautologie“)
  - $G \vDash$ („G ist unerfüllbar“)

Folgerung

- Was bedeutet es, dass eine Formel G aus einer Formelmenge **M** folgt? Sei **M** = $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$.
  - Wenn eine Belegung *A* gleichzeitig alle Formeln der Menge **M** erfüllt, muss auch *A*(G) = 1 sein.
  - $\mathbf{M} \models G$ gdw. $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n \models G$
- Wie weist man Folgerung nach?
  - Wahrheitstafel
  - Mittels dem Theorem: $\mathbf{M} \models \mathbf{G}$ **gdw.** $\mathbf{M} \cup \{\neg \mathbf{G}\} \models$
    - <u>Sehr hilfreich</u> da wir diverse Methoden zum Nachweis von Unerfüllbarkeit kennenlernen werden.

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Inferenzregeln

- Gesucht: Verfahren um aus einer Menge Formeln daraus folgende Formeln abzuleiten.
- Methode dazu: Inferenzregeln
- Inferenzregeln besitzen:
  - (Formel)menge an Prämissen
  - Eine Konklusion
- Damit die Inferenzregel **<u>korrekt</u>** ist, muss **die Konklusion aus den Prämissen folgen** (andernfalls wäre die „Inferenzregel“ nicht sehr hilfreich oder sinnvoll)

$$\frac{A\ ,\ (A \Rightarrow B)}{B}$$

$$A\ ,\ (A \Rightarrow B)\ \therefore\ B$$

Korrektheit von Inferenzregeln

- Gegeben: *MyRule*: $(A \vee B), (B \Rightarrow C) \;\therefore\; (A \vee C)$
- Wir wollen nachweisen: $\{(A \vee B), (B \Rightarrow C)\} \vDash (A \vee C)$

A	B	C	$(A \vee B)$	$(B \Rightarrow C)$	$(A \vee C)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Folgerungsbedingung ist erfüllt → Inferenzregel ist korrekt!

Ableitung (im Kalkül)

- Ein Kalkül $C = (L_{AL}, Ax, R)$ besteht aus:
  - Der aussagenlogischen Sprache L_{AL}
  - Einer Axiommenge Ax
  - Einer Inferenzregelmenge R
- Mit Ableitung können aus einer Formelmenge daraus folgende Formeln gefunden werden (sofern ein a-korrektes Kalkül vorliegt).
- Beispiel: Leiten Sie mittels $C = (L_{AL}, Ax, R)$ ab:

$$\{(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}), \mathbf{B}, (\mathbf{B} \Rightarrow (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{D}))\} \vdash_C (\mathbf{A} \vee \mathbf{D})$$

Dabei sei: $Ax = \emptyset$, $R = \{MP, MyRule\}$

Ableitung (im Kalkül): Lösung

- $M = \{(A \vee B), B, (B \Rightarrow (B \Rightarrow D))\} \vdash_C (A \vee D)$

MP: $\dfrac{A, (A \Rightarrow B)}{B}$ MyRule: $\dfrac{(A \vee B), (B \Rightarrow C)}{(A \vee C)}$

Nr.		Formel	Begründung	
(1)	$F_1 :=$	B	aus M	
(2)	$F_2 :=$	$(B \Rightarrow (B \Rightarrow D))$	aus M	
(3)	$F_3 :=$	$(B \Rightarrow D)$	(1), (2), MP	$sub_3(A) = B$, $sub_3(B) = (B \Rightarrow D)$
(4)	$F_4 :=$	$(A \vee B)$	aus M	
(5)	$F_5 :=$	$(A \vee D)$	(3), (4), MyRule	$sub_5(A) = A$, $sub_5(B) = B$, $sub_5(C) = D$

Pause!

30 Minuten

Kleines Quiz

- Was kann die Formel **F** in den folgenden Beispielen jeweils möglicherweise sein? Gültig, Kontingent und/oder Unerfüllbar?
- $\neg F$ unerfüllbar
- G unerfüllbar, $(F \vee G)$ gültig
- G gültig, $(F \Rightarrow G)$ gültig
- G kontingent, $F \models G$
- G kontingent, $(F \vee G)$ gültig
- G gültig, $(F \wedge G)$ kontingent

Kleines Quiz: Lösungen

- Was kann die Formel **F** in den folgenden Beispielen jeweils möglicherweise sein? Gültig, Kontingent und/oder Unerfüllbar?
- $\neg F$ unerfüllbar (g)
- G unerfüllbar, $(F \vee G)$ gültig (g)
- G gültig, $(F \Rightarrow G)$ gültig (g k u)
- G kontingent, $F \vDash G$ (k u)
- G kontingent, $(F \vee G)$ gültig (g k)
- G gültig, $(F \wedge G)$ kontingent (k)

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Hornformeln

- Teilmenge der aussagenlogischen Sprache
- Formeln in KNF mit maximal einem Aussagen-symbol ohne Negation davor („positives Literal“) in jeder Klausel.
- Beispiel für eine Hornformel:
  $(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge A \wedge (B \vee \neg D) \wedge (\neg E \vee \neg D \vee \neg A) \wedge E$
- Jede Horn-Klausel kann als Implikation geschrie-ben werden, sofern 2 neue Formeln eingeführt werden: $\top$ („top“) und $\bot$ („bottom“)
- $\top$ ist tautologisch und $\bot$ unerfüllbar

Implikationsschreibweise

- Offenbar gilt:
  - $F \equiv (\top \Rightarrow F)$ und $\neg F \equiv (F \Rightarrow \bot)$ für alle Formeln F.
- Jede Klausel wird nun wie in den folgenden Beispielen umgeschrieben:
  - $(A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D) \equiv (A \vee \neg B \vee \neg(C \wedge D)) \equiv$ $(A \vee \neg(B \wedge C \wedge D)) \equiv (\neg(B \wedge C \wedge D) \vee A) \equiv$ $((B \wedge C \wedge D) \Rightarrow A)$
  - $A \equiv (\top \Rightarrow A)$
  - $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \equiv (\neg A \vee \neg(B \wedge C)) \equiv \neg(A \wedge B \wedge C) \equiv$ $((A \wedge B \wedge C) \Rightarrow \bot)$

Der Markierungsalgorithmus

- Erfüllbarkeitstest-Verfahren für Hornformeln
- Idee:
  - Formel ist in KNF, d.h. alle Klauseln müssen erfüllt sein, damit die Formel erfüllt ist.
  - Positive Literale, die alleine eine Klausel ausmachen, müssen 1 sein.
  - Wenn alle negativen Literale einer Klausel 1 sind, muss das einzig positive Literal der Klausel 1 sein.
  - Falls es kein positives Literal gibt in einer Formel, aber alle negativen Literale auf 1 gesetzt wurden, ist die Formel automatisch unerfüllbar.

Markierungsalgorithmus: Beispiel

- Wenden Sie den Markierungsalgorithmus auf die folgende Formel an:

  $\neg A \wedge (B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge C \wedge D \wedge (\neg C \vee \neg D \vee B) \wedge (\neg B \vee E) \wedge (\neg E \vee \neg A)$

Markierungsalgorithmus: Lösung

- $\neg A \wedge (B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge C \wedge D \wedge (\neg C \vee \neg D \vee B) \wedge (\neg B \vee E) \wedge (\neg E \vee \neg A) \equiv$
  $(A \Rightarrow \bot) \wedge ((A \wedge C) \Rightarrow B) \wedge (\top \Rightarrow C) \wedge (\top \Rightarrow D) \wedge ((C \wedge D) \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow E) \wedge ((E \wedge A) \Rightarrow \bot)$
- $(A \Rightarrow \bot) \wedge ((A \wedge C^1) \Rightarrow B) \wedge (\top \Rightarrow C^1) \wedge (\top \Rightarrow D^1) \wedge ((C^1 \wedge D^1) \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow E) \wedge ((E \wedge A) \Rightarrow \bot)$
- $(A \Rightarrow \bot) \wedge ((A \wedge C^1) \Rightarrow B^2) \wedge (\top \Rightarrow C^1) \wedge (\top \Rightarrow D^1) \wedge ((C^1 \wedge D^1) \Rightarrow B^2) \wedge (B^2 \Rightarrow E) \wedge ((E \wedge A) \Rightarrow \bot)$
- $(A \Rightarrow \bot) \wedge ((A \wedge C^1) \Rightarrow B^2) \wedge (\top \Rightarrow C^1) \wedge (\top \Rightarrow D^1) \wedge ((C^1 \wedge D^1) \Rightarrow B^2) \wedge (B^2 \Rightarrow E^3) \wedge ((E^3 \wedge A) \Rightarrow \bot)$

Markierungsalgorithmus: Lösung

- $(A \Rightarrow \bot) \wedge ((A \wedge C^1) \Rightarrow B^2) \wedge (\top \Rightarrow C^1) \wedge (\top \Rightarrow D^1) \wedge ((C^1 \wedge D^1) \Rightarrow B^2) \wedge (B^2 \Rightarrow E^3) \wedge ((E^3 \wedge A) \Rightarrow \bot)$
- Formel ist erfüllbar!
- Eine Erfüllende Belegung ist:

x	A	B	C	D	E
A(x)	0	1	1	1	1

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Resolution

- Einschränkung auf Hornformeln ist unhandlich
- Gibt es ein ähnlich einfaches Verfahren, wie den Markierungsalgorithmus, für allgemeine Formeln aus L_{AL}?
- Vermutlich nicht! Diese Frage ist bisher ungeklärt und hat tiefgreifende Zusammenhänge zur Komplexitätstheorie (welche am Ende vom Automatenteil behandelt wird)!
- Aber: *Un*erfüllbarkeit lässt sich gut mit Hilfe des ***Resolutionskalküls*** nachweisen.

Einschub: Klauselmengen-Darstellung einer Formel in KNF

- Die Klauselmengen-Darstellung ist eine äquivalente Repräsentation einer Formel in KNF.
- Am besten zu verstehen am Beispiel:
  - Formel in KNF:
    $(A \vee B \vee \neg C) \wedge A \wedge (B \vee \neg D \vee B) \wedge (C \vee D \vee A)$
  - Formel in Klauselmengen-Darstellung:
    $\{ \ \{A, B, \neg C\}, \ \{A\}, \ \{B, \neg D\}, \ \{C, D, A\} \ \}$

Resolution

- Gegeben: Formel in KNF in Klauselmengen-Darstellung. Ablauf:
  - Suche nach ***einem*** Aussagensymbol, welches in 2 Klauseln, einmal als positives Literal und einmal als negatives Literal vorkommt.
  - Streiche beide Vorkommen, Vereinige die verbleibenden Inhalte der beiden Klauseln und füge sie der Klauselmenge als neue Klausel hinzu.
  - Wiederhole den Vorgang, bis entweder keine neuen Klauseln entstehen, oder aber die leere Klausel abgeleitet wurde.

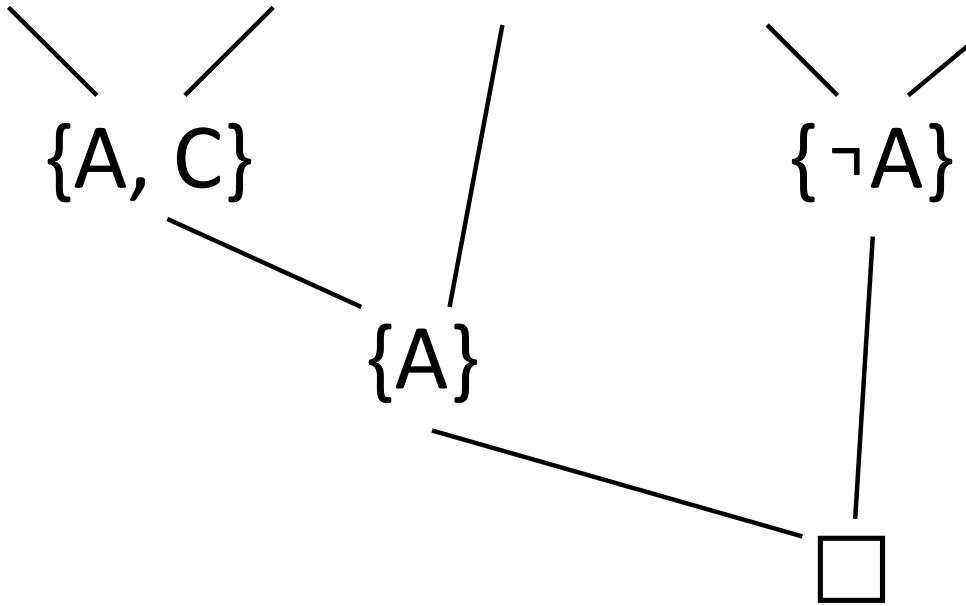
Resolution: Beispiel

- Weisen Sie folgendes mittels Resolution nach:
  $(A \vee \neg B) \wedge (B \vee C) \wedge \neg C \wedge (\neg A \vee D) \models D$

Resolution: Beispiel (Lösung)

- $(A \vee \neg B) \wedge (B \vee C) \wedge \neg C \wedge (\neg A \vee D) \models D$ gdw. $\{(A \vee \neg B) \wedge (B \vee C) \wedge \neg C \wedge (\neg A \vee D)\} \cup \{\neg D\} \models$
- Klauselmengendarstellung:

$\{ \{A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg C\}, \{\neg A, D\}, \{\neg D\} \}$



Resolution: Alternativen

- P-Resolution:
  - Resolventenbildung nur möglich, wenn in einer der beiden Klauseln nur **p**ositive Literale vorkommen.
- N-Resolution:
  - Resolventenbildung nur möglich, wenn in einer der beiden Klauseln nur **n**egative Literale vorkommen.
- P- und N-Resolution genau so mächtig, wie die normale Resolution!
- Weitere Resolutionsformen:
  - Lineare Resolution, Einheitsresolution, ...

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Prädikatenlogik

- Idee:
  - Aufsplitten atomarer Aussagensymbole in Bestandteile, die keine Aussagen mehr sind.
- Mächtiger als aussagenlogische Formeln.

Prädikatenlogik

- 5 neue Konzepte „unter der Ebene der atomaren Aussagen“:
  - **Konstanten**: entsprechen Worten
  - **Variablen**: wie Konst., aber mit Sonderfunktion
  - **Terme**: Oberbegriff: Konstanten / Variablen
  - **Funktionen**: entsp. Satzfragmenten. Anwendung erzeugt „*komplexe Terme*“. Werden angewendet auf (komplexe) Terme.
  - **Prädikate**: Werden angewendet auf (komplexe) Terme und *erzeugen atomare Aussagen*.

Notationskonventionen

- Folgende Konventionen zur Notation gibt es:
  - **Konstanten**: Kleinbuchstaben ab „a“
    - a, b, c, d, ...
  - **Variablen**: Kleinbuchstaben um „x“ herum
    - x, y, z, w, ...
  - **Funktionen**: Kleinbuchstaben ab „f“ + Klammern je nach Stelligkeit
    - f( ) g(, ,) h(,)
  - **Prädikate**: Großbuchstaben ab „P“ +Klammern je nach Stelligkeit
    - P( ) Q(, ,) R(,)

Bsp.: Prädikatenlogische Formel

- $P(x,a) \Rightarrow (P(b, f(c)) \wedge Q(g(y, z)))$

- Zuordnung der Bestandteile:
  - **Konstanten**: a, b, c
  - **Variablen**: x, y, z
  - **Terme**: a, b, c, x, y, z
  - **Funktionen**: f, g
  - **Komplexe Terme**: f(c), g(y, z)
  - **Prädikate**: P, Q
  - **Atomare Aussagen**: P(x,a), P(b, f(c)), Q(g(y))

Ablauf – Tag 1

- Organisation, Vorstellung, etc.
- Logik: Allgemeine Motivation
- AS_{AL} und L_{AL}
- Strukturelle Induktion in der Aussagenlogik
- Semantik, Äquivalenz und Normalformen
- Folgerbarkeit, Ableitungen und Inferenzregeln
- <Pause>
- Hornformeln und der Markierungsalgorithmus
- Resolution
- Prädikatenlogik allgemein
- Strukturen und Auswertungen von PL-Formeln

Universen und Strukturen

- Auswertung von prädikatenlogischen Formeln ist deutlich komplexer, als von a.l. Formeln.
- Eine PL-Formel kann viele *Interpretationen* haben.
- Zu Grunde liegt aber immer eine *Domäne* bzw. ein *Universum* U.
- Eine *Struktur* S = (U, I) zu einer PL-Formel legt Universum U und Interpretation I fest und erlaubt die Berechnung eines Wahrheitswertes

Universen und Strukturen formal

- Formal ist ein Universum U eine Menge.
- Bei der Interpretation unterscheidet sich dies:
  - Die Interpretation von Konstanten und Variablen ist formal ein Element aus U.
  - Die Interpretation von Funktionen f ist eine Abbildung $f : U \times U \times \ldots \rightarrow U$
  - Insbesondere ist damit jeder komplexe Term auch nur ein Element aus U.
  - Die Interpretation von Prädikatensymbolen ist Formal ein Test auf Zugehörigkeit zu einer Teilmenge von U. Ergibt 0 oder 1.

Prädikatenlogik: Quantoren

- Sonderfunktion von Variablen:
  Sie können quantifiziert werden.
- *Allquantor* $\forall$ und *Existenzquantor* $\exists$
- Quantoren sitzen außerhalb von Prädikaten (also auf/über der atomaren Aussagen-Ebene).
- Quantoren haben einen Gültigkeitsbereich, der sich auf das nächste Symbol (bzw. Klammer) bezieht. Dieser wird als *Skopus* bezeichnet.
- Quantoren überschreiben jede Interpretation der an sie gebundenen Variablen!

Prädikatenlogik: Quantoren

- Bei der Auswertung werden alle Elemente des Universums an Stelle der gebundnen Variablen überprüft und der jeweilige Wahrheitswert der Formel wird ermittelt.
- Wenn die Formel <u>bei wenigstens einem Element</u> zu 1 ausgewertet wurde, wird ein <u>Existenz-quantor</u> zu 1 ausgewertet.
- Wenn <u>bei jedem Element</u> die Formel zu 1 ausgewertet wurde, wird ein <u>Allquantor</u> zu 1 ausgewertet (Ein Existenzquantor natürl. auch).

Beispiel-Auswertung

- Werten Sie mit der Struktur $S = (U, I)$ die Formel $F = \forall x\, (\exists y\, P(f(x, y)) \vee Q(x, c))$ aus!
- $U = \{a, b\}$
- I: $x \mapsto \mathbf{a}$
  $y \mapsto \mathbf{b}$
  $c \mapsto \mathbf{a}$
  f: $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \mapsto \mathbf{a}$ $\quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a}$
  $(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \mapsto \mathbf{a}$ $\quad (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{b}$
  $P = \{\mathbf{b}\}$
  $Q = \{(x, y) \in U \times U \mid x = y\}$

Beispiel-Auswertung: Lösung

- $F = \forall x\ (\exists y\ P(f(x, y)) \vee Q(x, c))$
- $\forall x\ (\exists y\ P(f(x, y)) \vee Q(x, \mathbf{a}))$
- Der Übersichtlichkeit halber sei:
  $G = (\exists y\ P(f(x, y)) \vee Q(x, \mathbf{a}))$ (Formel ohne $\forall x$)

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>f(x, y)</th><th>P(f(x, y))</th><th>(∃y P(f(x, y))</th><th>Q(x, a)</th><th>G</th><th>F</th></tr>
<tr><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>0</td><td rowspan="2">0</td><td>1</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="4">1</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b</td><td>a</td><td>a</td><td>0</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>b</td><td>b</td><td>b</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

Das wars für heute!

Bis morgen! ☺